
ФІЗИЧНІ, ХІМІЧНІ ТА ІНШІ ЯВИЩА, НА ОСНОВІ ЯКИХ МОЖУТЬ БУТИ СТВОРЕНІ СЕНСОРИ

PHYSICAL, CHEMICAL AND OTHER PHENOMENA, AS THE BASES OF SENSORS

УДК 538.935 PACS numbers: 72.10.-d, 72.20.Dp, 72.20.Fr, 72.90.+y, 73.63.-b
DOI <http://dx.doi.org/10.18524/1815-7459.2017.2.106603>

ВИМІРЮВАННЯ ПРОВІДНОСТІ Й АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНЗИСТОРІВ У РАМКАХ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТУ ЕЛЕКТРОНІВ

*Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха**

Одеський державний екологічний університет,
факультет комп'ютерних наук,
вул. Львівська, 15, Одеса, Україна

тел. (067) 725 2209, *E-mail: quantumnet@yandex.ua*

* Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
факультет радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем,
пр. Глушкова, 4г, Київ, Україна, тел. (044) 526 0532;
Інститут фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України,
пр. Науки, 41, Київ, Україна, тел. (044) 525 6033,
E-mail: maksym_strikha@hotmail.com

ВИМІРЮВАННЯ ПРОВІДНОСТІ Й АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНЗИСТОРІВ У РАМКАХ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТУ ЕЛЕКТРОНІВ

Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха

Анотація. У методичній статті, розрахованій на науковців, викладачів та студентів вищої школи, обговорено експериментальні методи вимірювання опору в узагальненій моделі транспорту електронів Ландауера–Датта–Лундстрорма (ЛДЛ), зокрема, в умовах прикладання зовнішнього

магнітного поля: метод змінної довжини провідника, чотириточкову схему вимірювань, класичний метод вимірювання ефекту Холла й різні варіанти методу ван дер Пау, а також температурні вимірювання й урахування артефактів (ефект Нерста), вимірювання в сильних магнітних полях (ефект Шубнікова–де Гааза).

Ключові слова: нанофізика, наноелектроніка, вимірювання опору, метод ван дер Пау, ефект Холла, температурні вимірювання, врахування артефактів, ефект Нернста, ефект Шубнікова–де Гааза

MEASURING OF CONDUCTIVITY AND ANALYSIS OF ELECTROPHYSICAL CHARACTERISTICS OF TRANSISTORS WITHIN GENERALIZED MODEL OF ELECTRON TRANSPORT

Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha

Abstract. In a tutorial article directed to serve researchers, university teachers and students, we discuss experimental methods for measuring the resistance in the frame of the generalized transport Landauer – Datta – Lundstrom (LDL) model, including measurements under applied external magnetic field, namely: method of variable resistor length, four-point measurement scheme, the classical method of the Hall effect measurement and different variants of the van der Pauw method, temperature measurements and accounting for artifacts (Nernst effect), measurements in strong magnetic fields (Shubnikov – de Haas effect).

Keywords: nanophysics, nanoelectronics, resistance measurement, van der Pauw method, Hall effect, thermal measurement, artifact measurement, Nernst effect, Shubnikov – de Haas effect

ИЗМЕРЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ И АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНЗИСТОРОВ В РАМКАХ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТА ЭЛЕКТРОНОВ

Ю. А. Кругляк, М. В. Стриха

Аннотация. В методической статье, рассчитанной на исследователей, преподавателей и студентов высшей школы, обсуждаются экспериментальные методы измерения сопротивления в рамках обобщенной модели транспорта электронов Ландауэра – Датта – Лундстрема (ЛДЛ), в том числе в условиях внешнего приложенного магнитного поля: метод переменной длины проводника, четырехточечная схема измерений, классический метод измерения эффекта Холла и различные варианты метода ван дер Пау, а также температурные измерения и учет артефактов (эффект Нернста), измерения в сильных магнитных полях (эффект Шубникова – де Гааза).

Ключевые слова: нанофизика, нанoeлектроника, измерение сопротивления, метод ван дер Пау, эффект Холла, температурные измерения, учет артефактов, эффект Нернста, эффект Шубникова–де Гааза

1. Вступ

Продовжуючи знайомити вітчизняних викладачів, аспірантів і студентів, які читають курси або навчаються на різних спеціалізаціях фізичного й інженерного профілю, із сучасною концепцією викладання фізики наносистем, автором якої є проф. Супрійо Датта (Supriyo Datta), до певної міри альтернативною традиційній, що відштовхується від розгляду аналогічних явищ у великих об'ємних провідниках, ми розглянули в [1] модель Ландауера – Датта – Лундстрема (ЛДЛ), яка вже знайшла широке застосування при аналізі як електронного, так і фононного транспорту в резисторах як нанорозмірних, так і довгих чи об'ємних.

При цьому розгляд у [1] здійснювався для випадку, коли температура контактів резистора однакова. У [2] натомість ми розглянули термоелектричні ефекти Зеєбека і Пельт'є в моделі ЛДЛ, а також якісно обговорили закон Відемана – Франца й основні рівняння термоелектрики з відповідними транспортними коефіцієнтами. Потому в [3] ми отримали доведення для результатів, постульованих у [2], причому зробили це для 1D, 2D і 3D провідників з довільним законом дисперсії і будь-яким режимом провідності: балістичним, дифузійним, або ж перехідним.

З позицій транспортної моделі Ландауера – Датта – Лундстрема у [4] побудовано узагальнену модель переносу тепла фононами. У [5] ми розглянули, як узагальнена транспортна модель ЛДЛ описує провідність графену. Надалі, в [6] ми розглянули роль розсіяння в моделі ЛДЛ й продемонстрували, що при описі транспорту електронів у провіднику в дифузійному режимі важливу роль відіграє середня довжина вільного пробігу λ , яка визначає коефіцієнт проходження τ . Нарешті, в [7] було розглянуто кінетичне рівняння Больцмана (КРБ), яке в застосуванні до наноелектроніки розв'язує ті ж завдання, що й узагальнена транспортна модель ЛДЛ. Ми продемонстрували: для одних задач краще використовувати КРБ, а для других – модель ЛДЛ.

Глибший розгляд інших аспектів використання моделі ЛДЛ читач знайде в [8-10]. Натомість цю нашу статтю присвячено методам вимірювання провідності й ефекту Холла в

слабких та сильних магнітних полях, зокрема й за наявності перепаду температур на контактах провідника. Ми також обговоримо, як уникнути при вимірюванні впливу артефактів, таких, як опір на контактах, та неконтрольованих термоелектричних ефектів, та продемонструємо, як здійснюється обробка результатів при конкретних вимірюваннях.

2. Основні вирази і співвідношення

Для характеристики матеріалу провідника в принципі потрібно виміряти всі чотири термоелектричні коефіцієнти [1-3]: провідність (чи опір), коефіцієнт Зеєбека (або S_{Seebeck}), коефіцієнт Пельт'є та електронну теплопровідність. Співвідношення Кельвіна дозволяє вимірювати або коефіцієнт Зеєбека, або коефіцієнт Пельт'є. Техніка вимірювання коефіцієнта Зеєбека достатньо складна, тому ми її тут не обговорюватимемо, відіславши читача натомість до [11]. Не простіше вимірювати й електронну теплопровідність, тому зазвичай її оцінюють через закон Відемана – Франца. В нашому огляді ми зосередимося на вимірюванні провідності.

Розглядатимемо струми в дифузійному режимі з рівнянням для густини струму

$$J_x = \sigma \frac{d(E_F/q)}{dx}. \quad (1)$$

Тут q – заряд електрона, σ – питома провідність, E_F – рівень Фермі (градієнт якого, як ми вважаємо, відмінний від 0 тільки вздовж осі x). При однорідному розподілі густини електронів $d(E_F/q)/dx = E_x$, тому

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma E_x \\ E_x &= \rho J_x \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\rho = 1/\sigma$ – питомий опір. Зазвичай провідність або опір певного матеріалу вимірюють у дифузійному режимі, оскільки саме в такому режимі провідність залежить від матеріалу провідника, а не від його вимірності. Слід також зазначити, що вирази (1) і (2) однаково застосовні як для n -провідників, так і для p -провідників.

Вирази (1) і (2) застосовні до провідників різної вимірності (1D, 2D і 3D); для просто-

ти ми при цьому вважаємо, що просторова неоднорідність має місце тільки вздовж осі x . Одиниці вимірювання величин, однак, залежать від вимірності зразка, а саме:

$$\begin{aligned} 1D: & E_x \text{ В/м } J_x \text{ А } \rho \text{ Ом/м} \\ 2D: & E_x \text{ В/м } J_x \text{ А/м } \rho \text{ Ом} \\ 3D: & E_x \text{ В/м } J_x \text{ А/м}^2 \rho \text{ Ом}\cdot\text{м} \end{aligned} \quad (3)$$

Для 2D провідника питомий опір зазвичай називають поверхневим опором і як одиницю вимірювання використовують Ом/□ (Ω/sq: Ohms per square), що має вимірність Ом.

Розгляньмо плоский резистор, з довжиною L і площею перерізу $A = Wt$, зображений на рис. 1.

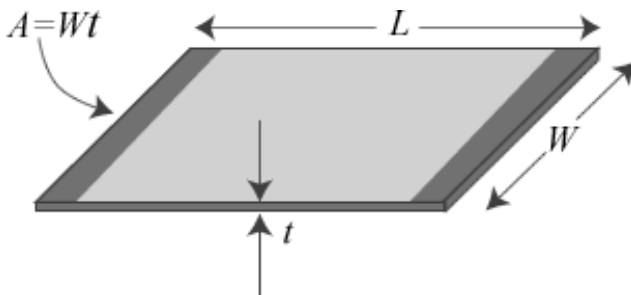


Рис. 1. Плоский провідник з товщиною t . Якщо більша від половини дебройлівської довжини хвилі для електрона, то можемо вважати рух електрона вздовж кожної з осей квазікласичним, а сам провідник – тривимірним; якщо ж мала порівняно з половиною довжини дебройлівської хвилі, то квазікласичний рух електронів можливий тільки в двох напрямках, в одному він квантований, і такий провідник називаємо двовимірним.

Для струму I , що протікає в напрямку x , маємо:

$$I = GV = \left(\sigma \frac{A}{L} \right) V = \left(\sigma \frac{Wt}{L} \right) V, \quad (4)$$

де G – повна провідність зразка, V – прикладена до нього напруга. При цьому для двовимірного випадку $\sigma_s = (nt)q\mu = n_s q\mu$ (де n_s – рухливість носіїв), і провідність

$$G = \sigma_s \left(\frac{W}{L} \right), \quad (5)$$

де $\sigma_s = 1/\rho_s$ – питома поверхнева провідність, а n_s – поверхнева концентрація електронів. Для 3D зразка $G = \sigma A/L$, а для 1D провідника $G = \sigma/L$ [1].

Алгоритм обчислення поверхневої провідності плоского провідника товщини t залежить від того, чи поведуть себе електрони в провіднику як 3D об'єкти (квазікласичний рух дозволено вздовж трьох осей), чи як 2D об'єкти (квазікласичний рух дозволено тільки вздовж самої поверхні, перпендикулярно до поверхні рух квантово обмежений). Якщо t достатньо велике (більше від половини довжини дебройлівської хвилі електрона), тоді квантове обмеження на рух перпендикулярно до поверхні слабе, й електрони можна розглядати як 3D частинки. Тоді поверхнева провідність в режимі малого відхилення від рівноваги визначатиметься як [1]

$$\sigma_s = \frac{2q^2}{h} \int t M_{3D}(E) \lambda(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE. \quad (6)$$

Тут M_{3D} – питома число мод провідності, що відповідають енергії E , яке припадає на одиницю площі перерізу A , $\lambda(E)$ – довжина вільного пробігу, що так само залежить від енергії,

$f_0 = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$ – рівноважна Фермі-Дірака функція розподілу електронів. Саме таке припущення ($n_s = nt$) ми використали при переході від (4) до (5), де n_s – тривимірна концентрація електронів у 3D зразку.

Якщо ж товщина зразка t достатньо мала (менша від половини довжини дебройлівської хвилі електрона), то квантове обмеження на рух перпендикулярно до поверхні сильне, і такий рух уже не можна вважати квазікласичним; тоді електрони слід розглядати як 2D частинки, й поверхнева провідність [1]

$$\sigma_s = \frac{2q^2}{h} \int M_{2D}(E) \lambda(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE. \quad (7)$$

Нагадаємо, що $M_{3D} = M_{3D} A$ – це питома число мод провідності, що дорівнює числу мод провідності, яке припадає на одиницю площі поперечного перерізу 3D провідника, а $M_{2D} = M_{2D} W$ – це питома число мод провідності, що дорівнює числу мод провідності, яке припадає на одиницю довжини поперечно-

го (перпендикулярного до напрямку струму) перерізу 2D провідника. Якщо режим транспорту в провіднику квазібалістичний, то середню довжину вільного пробігу $\lambda(E)$ слід замінити її формальним значенням [1, 10].

Як видно з (6) та (7), провідність залежить від розташування рівня Фермі, яке в свою чергу залежить від концентрації електронів. Таким чином, у кінцевому підсумку провідність залежить від поверхневої концентрації електронів, $\sigma_s(n_s)$. Вимірявши експериментально залежність питомої провідності від концентрації електронів, знайдемо рухливість електронів μ , з $\sigma_s = n_s q \mu$. Звичайно, слід пам'ятати, що вирази (6) і (7) однаково застосовні як для n -провідників, так і для p -провідників.

3. Огляд методів вимірювання опору (провідності)

Розглянемо найпростішу задачу вимірювання опору R_{ch} матеріалу, з якого виготовлено резистор завдовжки L (рис. 2): $R_{ch} = \rho_s L / W$.

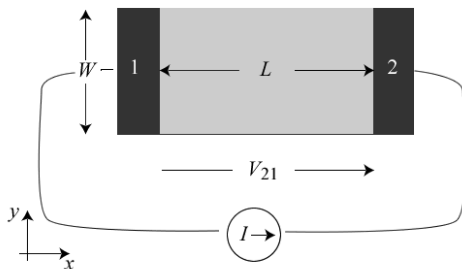


Рис. 2. Плоский резистор з двома металічними контактами 1 і 2.

При подачі струму на контакт 2 і виведенні його з контакту 1 вимірюється різниця потенціалів V_{21} . Звідси одержуємо

$$R = \frac{V_{21}}{I} = R_{ch} + 2R_c, \quad (8)$$

де R_c – опір контакту метал/напівпровідник. Отже, вимірний опір включає в себе опір контакту. Потрібно або окремо виміряти опір контакту, або виконати вимірювання за такою схемою, яка виключить опір контактів.

Спершу розглянемо перший варіант вимірювання. Він відомий як метод змінної довжини провідника Transmission Line Method (TLM) [12]. Використовують плоский резистор з контактами 1, 2, 3, ..., розташованими на різній відстані один від одного (рис. 3).

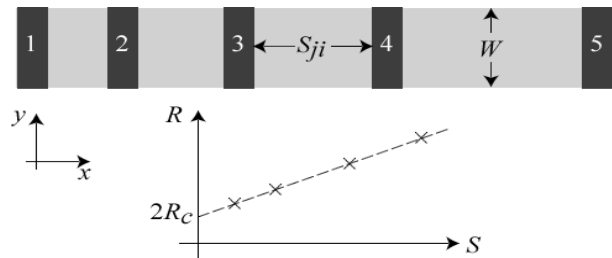


Рис. 3. Контакти розташовані, наприклад, на все більшій відстані S_{ji} один від одного. Зображено типовий графік залежності опору від відстані між контактами.

Якщо відкласти вимірний опір $R_{ji} = V_{ji} / I$ як функцію відстані між двома сусідніми контактами S_{ji} , одержимо пряму лінію (рис. 3)

$$R_{ji} = \frac{V_{ji}}{I} = 2R_c + \rho_s \frac{S_{ji}}{W}. \quad (9)$$

З нахилу прямої лінії одержуємо питомий опір, а відрізок, який відтинається на осі опорів, дає опір контакту [12].

Тепер розглянемо другий варіант вимірювання опору з виключенням опору контактів шляхом застосування чотириточкової схеми вимірювання (рис. 4).

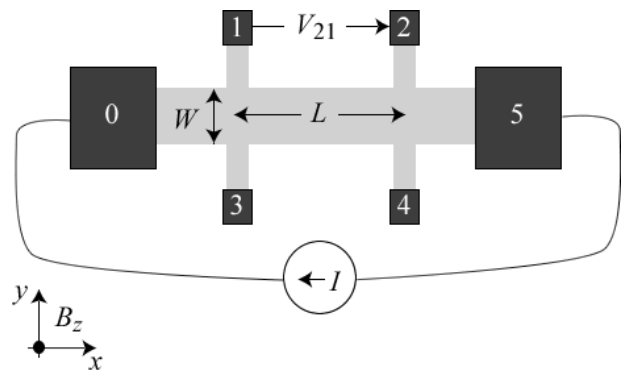


Рис. 4. Чотириточкова схема вимірювання опору, яка використовується також для вимірювання ефекту Холла (холлівська лінійка).

Контакти 0 та 5 використовують для підведення струму, а контакти 1 і 2, або ж 3 і 4 використовують для вимірювання напруги. Якщо використати вольтметр з великим імпедансом, то струм між контактами 1 і 2 (або ж 3 і 4) відсутній. Отже, падіння напруги на межі контактів з досліджуваним провідником немає, і, зна-

ючи силу струму, ми можемо одержати чистий опір матеріалу провідника:

$$R = \frac{V_{21}}{I} = \rho_s \frac{L}{W}. \quad (10)$$

Докладні відомості про ці широко застосовувані вимірювальні схеми можна знайти в [13, 14]. Але надалі нам потрібно визначити ще й поверхневу концентрацію електронів.

4. Вимірювання ефекту Холла

Якщо в чотириточковій вимірювальній схемі (рис. 4) струм подати в напрямі $+x$, магнітне поле прикласти в напрямі $+z$, а напругу міряти в напрямі $+y$ між контактами 1 і 3, або 2 і 4, то результуюча холлівська напруга буде позитивною для n -провідників і негативною для p -провідників. Ця схема вимірювань дозволяє визначити поверхневу концентрацію електронів.

Оскільки струм протікає в напрямку $+x$, то електрони рухаються в напрямку $-x$ з середньою швидкістю, яка визначається співвідношенням $I_x = Wn_s q \langle v_x \rangle$ (рис. 5).

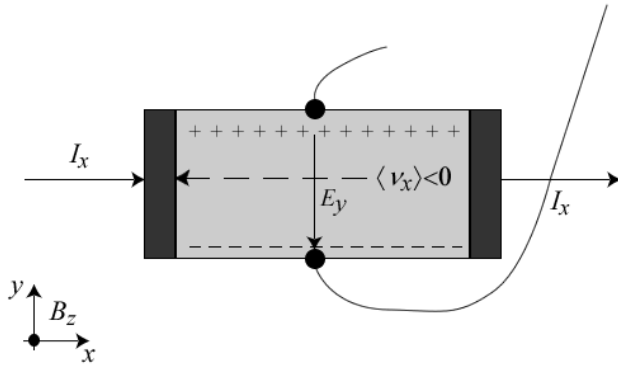


Рис. 5. Ефект Холла й вимірювання холлівської напруги

Магнітна складова сили Лоренца $\vec{F} = -q\vec{v} \times \vec{B}$ (діє на електрони в напрямі $-y$) призводить до накопичення електронів на нижній стороні 2D провідника, а на верхній стороні виникає дефіцит електронів, що в свою чергу породжує електричне поле в напрямку $-y$, що компенсує дію магнітного поля. Відповідну напругу $V_H = -WE_y$ називають холлівською.

Аналіз ефекту Холла почнімо з виразу [7]

$$\vec{J} = \sigma_s \vec{E} - \sigma_s \mu r_H [\vec{E} \times \vec{B}], \quad (11)$$

де r_H – холлівський фактор. Вираз (11) надалі зручно записати покомпонентно:

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma_s E_x - \sigma_s \mu r_H E_y B_z \\ J_y &= \sigma_s E_y + \sigma_s \mu r_H E_x B_z \end{aligned} \quad (12)$$

й переписати щодо електричного поля:

$$\begin{aligned} E_x &= \rho_s J_x + (\rho_s \mu r_H B_z) J_y, \\ E_y &= \rho_s J_y - (\rho_s \mu r_H B_z) J_x. \end{aligned} \quad (13)$$

Оскільки в описаних вище експериментальних умовах $J_y = 0$, то з другого рівняння маємо:

$$E_y = -\frac{r_H B_z J_x}{q n_s}, \quad (14)$$

що можна переписати в вигляді

$$R_H \equiv \frac{E_y}{B_z J_x} = \frac{r_H}{(-q)n_s} = \frac{1}{(-q)n_H}, \quad (15)$$

де n_H – коефіцієнт Холла, а

$$n_H \equiv \frac{n_s}{r_H} \quad (16)$$

називають холлівською концентрацією. Нагадаємо, що холлівський фактор [7]

$$r_H \equiv \frac{\langle \langle \tau^2 \rangle \rangle}{\langle \langle \tau \rangle \rangle^2} \quad (17)$$

близький до одиниці (дещо більший від неї) і його значення визначається механізмом розсіяння в провіднику.

Нарешті, запишемо коефіцієнт Холла через експериментально вимірювану холлівську напругу $V_H = -WE_y$ і струм $I = WJ_x$, а саме:

$$R_H = \frac{-V_H}{IB_z} = \frac{1}{(-q)n_H}. \quad (18)$$

Отже, експериментально вимірюваний коефіцієнт Холла прямо пов'язаний з холлівською концентрацією (для p -провідників $(-q)$ замінюємо на $(+q)$). Холлівську концентрацію зазвичай наводять як поверхневу концентрацію

електронів. Слід, однак, пам'ятати, що насправді холлівська концентрація і поверхнева концентрація електронів пов'язані між собою виразом (16).

4.1. Приклад аналізу результатів холлівського експерименту

Проаналізуємо подальші результати вимірювання ефекту Холла на холлівській лінійці (рис. 4):

$$L = 100 \text{ мкм}, \quad W = 50 \text{ мкм}, \quad I = 1 \text{ мкА},$$

$$B_z = 0.2 \text{ Тл}, \quad V_{21} |_{B_z=0} = 0.54 \text{ мВ}, \quad V_{24} |_{B_z=0.2 \text{ Тл}} = 0.13 \text{ мВ}.$$

З цих результатів можна одержати опір досліджуваного зразка, визначити, чи це провідник n - чи p -типу, знайти поверхневу концентрацію електронів (точніше, холлівську концентрацію) й рухливість (точніше, холлівську рухливість).

За відсутності магнітного поля

$$R_{xx} = V_{21} / I = 540 \text{ Ом}. \quad (19)$$

Оскільки вимірний опір $R_x = \rho_s L / W$ пропорційний питомому поверхневому опору, то

$$\rho_s = 270 \text{ Ом/□}. \quad (20)$$

Вимірня холлівська напруга V_{24} позитивна, тому маємо провідник n -типу. З виразу (18) знаходимо коефіцієнт Холла

$$R_H = \frac{-V_{24}}{IB_z} = -650 \text{ м}^2/\text{Кл} \quad (21)$$

і далі холлівську концентрацію

$$n_H = r_H n_s = 9.6 \times 10^{15} \text{ м}^{-2} = 9.6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}. \quad (22)$$

Далі, для питомої поверхневої провідності маємо:

$$\sigma_s = \frac{1}{\rho_s} \equiv n_s q \mu = n_H q \mu_H, \quad (23)$$

звідки для холлівської рухливості одержуємо

$$\mu_H = r_H \mu = 24100 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}. \quad (24)$$

Можна припустити той або інший механізм розсіяння, знайти холлівський фактор і визначити справжні значення поверхневої концентрації електронів та їхньої рухливості. Але одержані таким чином значення і містять певну невизначеність, пов'язану з вибором моделі розсіяння. Тому зазвичай наводять просто холлівську концентрацію та рухливість. Описаний вище ефект Холла називають також класичним ефектом Холла, щоб відрізнити його від аномального ефекту Холла в феромагнетиках і спінового ефекту Холла [25], розгляд яких виходить за межі нашої статті.

5. Метод вимірювання ван дер Пау

Метод ван дер Пау дозволяє виміряти опір і холлівські ефекти для плоского зразка довільної форми [13, 14, 15], не застосовуючи холлівську лінійку (рис. 6).

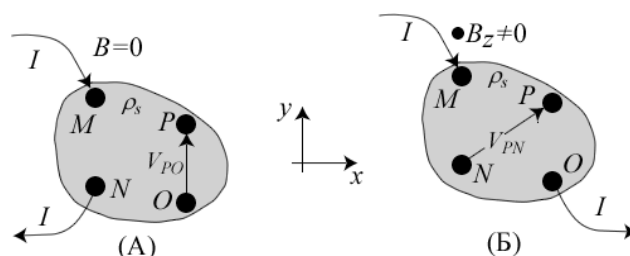


Рис. 6. Метод вимірювання ван дер Пау: (А) схема вимірювання опору; (Б) схема вимірювання ефекту Холла.

Досліджуваний зразок перебуває в площині xy . Він може мати довільну форму, але мусить бути однорідним з ізотропною провідністю й не мати отворів. Контакти мають бути точкові й міститися на периметрі зразка. При вимірюванні опору струм подається на два сусідні контакти, наприклад, М і N, а напругу міряють між двома іншими контактами Р і О (рис. 6А). Вимірний таким чином опір

$$R_{MN,OP} = \frac{V_{PO}}{I}$$

дозволяє визначити питомий поверхневий опір.

При вимірюванні ефекту Холла магнітне поле скеровують перпендикулярно до зразка, струм подають на два протилежні контакти, наприклад, М і О, а напругу вимірюють між

двома іншими контактами N і P. Вимірний опір

$$R_{MO, NP} = \frac{V_{PN}}{I} \quad (25)$$

дозволяє визначити холлівську напругу.

Аналіз вимірної схеми ван дер Пау почнімо з виразів (13)

$$\begin{aligned} E_x &= \rho_s J_x + (\rho_s \mu r_H B_z) J_y, \\ E_y &= \rho_s J_y - (\rho_s \mu r_H B_z) J_x. \end{aligned}$$

Різниця потенціалів між контактами N і P – це інтеграл за траєкторією

$$V_{PN}(B_z) = -\int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_N^P (E_x dx + E_y dy). \quad (26)$$

Холлівська напруга визначається як

$$V_H \equiv \frac{1}{2} [V_{PN}(+B_z) - V_{PN}(-B_z)]. \quad (27)$$

Підставляючи (13) в (26), знаходимо

$$V_H = \rho_s \mu_H B_z \left(\int_{y_N}^{y_P} J_x dy - \int_{x_N}^{x_P} J_y dx \right). \quad (28)$$

Струм, що входить у контакт M і виходить з контакту O, перетинає уявну траєкторію між контактами N і P. Закон збереження струму вимагає, щоб

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} dl, \quad (29)$$

де \hat{n} – одиничний вектор, нормальний до траєкторії, що пов'язує точки N і P, для якого

$$\hat{n} dl = d\vec{l} \times \hat{z} = dy \hat{x} - dx \hat{y}. \quad (30)$$

Підставляючи (30) до (29), знаходимо

$$I = \int_{y_N}^{y_P} J_x dy - \int_{x_N}^{x_P} J_y dx, \quad (31)$$

і, згідно з (28), остаточно

$$V_H = \rho_s \mu_H B_z I. \quad (32)$$

Таким чином, геометрія схеми ван дер Пау справді дозволяє виміряти ефект Холла.

Перейдімо до вимірювання опору за ван дер Пау. На рис. 7 схемі вимірювання опору за ван дер Пау (рис. 6А) поставлена у відповідність простіша для аналізу геометрія контак-

тів, розташованих у ряд на краю нескінченної півплощини.

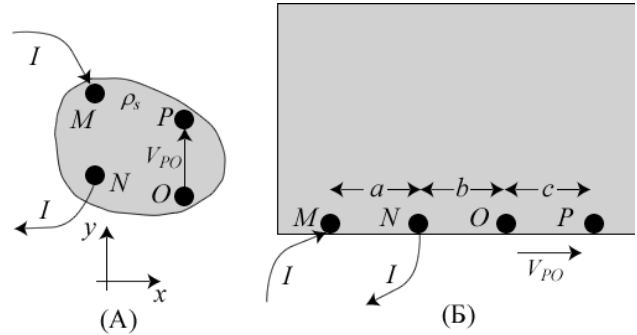


Рис. 7. Порівняння геометрії схеми (А) вимірювання опору за ван дер Пау з уявною схемою (Б) розташування контактів на краю нескінченної півплощини, яка дає ті ж самі результати вимірювання, що й схема (А) за цілком припустимих обмежень, що накладаються на досліджуваний об'єкт [15].

Ван дер Пау, використовуючи техніку конформних перетворень, довів, що результати вимірювань в обох схемах (А) і (Б) рис. 7 ідентичні за умови, що досліджуваний матеріал провідника однорідний, ізотропний і не містить отворів [10].

Розгляньмо, що відбувається при входженні струму в точковий контакт M нескінченної півплощини (рис. 7Б). Струм розходить радіально щодо точки входження з густиною й полем

$$J_r = \frac{I}{\pi r}, \quad E_r = \frac{I \rho_s}{\pi r}, \quad (33)$$

де r – модуль радіус-вектора до довільної точки півплощини, який бере початок у точці входження струму. Інтегруючи від r_0 до r , знаходимо потенціал електричного поля, створеного струмом,

$$V(r) - V(r_0) = -\frac{I \rho_s}{\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right). \quad (34)$$

Тепер можна написати (див. рис. 7), що

$$\begin{aligned} V(P) &= -\frac{I \rho_s}{\pi} \ln \left(\frac{a+b+c}{r_0} \right), \\ V(O) &= -\frac{I \rho_s}{\pi} \ln \left(\frac{a+b}{r_0} \right), \\ V_{PO} = V(P) - V(O) &= -\frac{I \rho_s}{\pi} \ln \left(\frac{a+b+c}{a+b} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Маємо ще втрату в потенціалі, зумовлену струмом, який виходить з контакту N, а саме:

$$V_{PO}^{(N)} = + \frac{I \rho_S}{\pi} \ln \left(\frac{b+c}{b} \right). \quad (36)$$

Різниця потенціалів між контактами O і P – це сума обох вкладів. Після ділення її на струм одержимо опір

$$R_{MN,OP} = \frac{V_{PO} + V_{PO}^{(N)}}{I} = \frac{\rho_S}{\pi} \ln \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)} \right], \quad (37)$$

який залежить від геометрії контактів. Опір визначається послідовністю його індексів у (37): струм входить у контакт M, залишає зразок через контакт N, різниця потенціалів вимірюється між контактами O і P з P як позитивним терміналом. Тепер подамо струм через контакт N й виведемо його через контакт O, а різницю потенціалів вимірюємо між контактами P і M. Тоді для опору маємо:

$$R_{NO,PM} = \frac{\rho_S}{\pi} \ln \left[\frac{(a+b)(b+c)}{ac} \right]. \quad (38)$$

Комбінуючи (37) і (38), одержимо вираз, який не залежить від геометрії контактів:

$$\exp \left(- \frac{\pi}{\rho_S} R_{MN,OP} \right) + \exp \left(- \frac{\pi}{\rho_S} R_{NO,PM} \right) = 1. \quad (39)$$

Аналогічний результат ван дер Пау одержав для геометрії рис. 7А.

Отже, метод вимірювання опору за ван дер Пау виглядає так: ми вимірюємо опір (рис. 6А), скеровуючи струм крізь сусідні контакти M і N, а різницю потенціалів вимірюємо між двома іншими контактами O і P: $R_{MN,OP} = V_{PO} / I$. Потім здійснюємо аналогічне вимірювання, пропускаючи струм через контакти N і O, а різницю потенціалів вимірюючи між P і M: $R_{NO,PM} = V_{PM} / I$. Використовуючи два одержані результати вимірювань, розв'язуємо рівняння (39) для визначення питомого поверхневого опору. Зразок, використовуваний в експерименті, може не мати якоїсь спеціальної форми, а контакти можуть розташовуватися більш або менш довільно й на різних відстанях один від одного. Для квадратного зразка $a = b = c$ і $R_{MN,OP} = R_{NO,PM} = V/I$, так що розв'язок рівняння (39) спрощується до

$$\rho_S = \frac{\pi V}{\ln 2 I} \quad (40)$$

і немає потреби розв'язувати трансцендентне рівняння (39) методом ітерацій, або чисельно.

Для вимірювання ефекту Холла (рис. 6Б) направимо магнітне поле в напрямку +z, струм проведемо між двома несусідніми контактами M та O, вимірюємо різницю потенціалів між двома іншими контактами N та P. Змінимо напрям магнітного поля і вимірюємо ту ж саму різницю потенціалів. Згідно з (32), середнє значення цих двох вимірів є холлівська напруга, яка дозволяє далі вирахувати холлівські коефіцієнт, концентрацію і рухливість.

Холлівська лінійка й геометрія ван дер Пау – це два різні способи виконати одне й те ж саме вимірювання. Метод ван дер Пау з квадратним розташуванням контактів (див. (40)) особливо зручний.

6. Температурні вимірювання

Вимірювання опору й ефекту Холла при різних температурах зразка дозволяє пролити світло на фізику процесів розсіяння в провіднику. Зазвичай будують графік залежності рухливості від температури (рис. 8А).

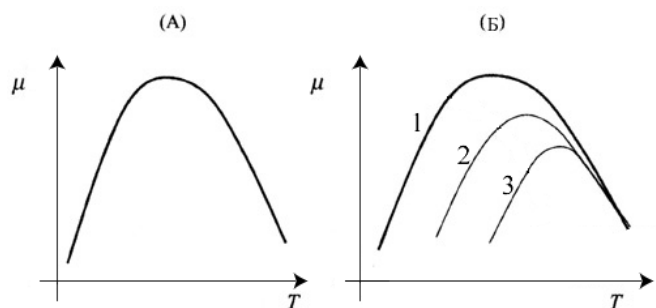


Рис. 8. Типова залежність рухливості від температури: (А) Характерний вигляд $\mu(T)$; (Б) Зсув $\mu(T)$ для трьох зразків з дедалі більшою концентрацією заряджених домішок

Якщо рухливість визначили з холлівських вимірювань, то на осі ординат відкладено фактично холлівську рухливість. З підвищенням температури рухливість спершу зростає, а потім виходить на плато й починає зменшуватися.

тися. Збільшення рухливості зі збільшенням температури зазвичай пов'язують із розсіянням електронів на заряджених чи іонізованих домішках, а дальший спад – з розсіянням на фононах. Якщо діють одночасно два механізми розсіяння – на іонізованих домішках і на фононах – то експериментально визначена рухливість якісно описується правилом Матіессена [16, 17]:

$$\frac{1}{\mu_{obs}} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_{ph}}, \quad (41)$$

яке показує: спостережувану рухливість контролює менша з тих двох рухливостей, які визначаються різними механізмами розсіяння.

Щоб зрозуміти причину збільшення рухливості зі збільшенням температури, звернімося до рис. 3 в [6]. Заряджені домішки народжують випадкові флуктуації потенціалу дна зони провідності, які стають випадково розташованими центрами розсіяння. Чим вища кінетична енергія електронів, тим вище електрони розташовані за шкалою енергій над дном зони провідності й тим менше відчувають флуктуації його потенціалу (й, відповідно, тим менше розсіюються). Отже, час розсіяння повинен зростати зі збільшенням енергії носіїв. Оскільки середня кінетична енергія невідроджених носіїв струму в провіднику пропорційна kT , то час розсіяння τ , а, відповідно, й рухливість $\mu = q\tau m^*$, повинні зростати з підвищенням температури. Кількісний опис залежності рухливості від температури передбачає усереднення належним чином залежності часу розсіяння від енергії $\tau(E - E_c)$ згідно з (48) в [6]. В 3D-провідниках розсіяння на заряджених домішках призводить до температурної залежності часу розсіяння $\sim T^{3/2}$ [16]. Важливе подальше: шойно експерименти показують зростання рухливості зі збільшенням температури, це означає, що участь у розсіянні беруть заряджені домішки.

Зменшення рухливості при високих температурах найчастіше спричинене розсіянням на фононах. Оскільки квазічастинки фонони є бозонами з нульовим хімічним потенціалом, їхнє число в одиниці фазового об'єму залежить від температури, а швидкість розсіяння, відтак, пропорційна числу фононів

$$\frac{1}{\tau(E)} \propto n_{ph}, \quad (42)$$

яке визначається статистикою Бозе – Ейнштейна:

$$n_{ph}(\hbar\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (43)$$

В ковалентних напівпровідниках (германій, кремній) домінує розсіяння на акустичних фононах. Спираючись на закони збереження енергії та імпульсу, можна показати, що основний вклад дають низькоенергетичні фонони. З урахуванням цього

$$e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT,$$

так що число фононів в одиниці фазового простору зростає з температурою лінійно,

$$n_{ph}(\hbar\omega) \approx \frac{kT}{\hbar\omega}.$$

Тоді з (42) випливає, що $\tau \propto \frac{1}{kT}$,

й тому рухливість повинна зменшуватися з підвищенням температури. Уточнення показника степені при температурі вимагає коректного усереднення часу розсіяння за енергією. В [16] показано, що в 3D провідниках

$$\mu \propto T^{-3/2}.$$

В полярних напівпровідниках (матеріали групи A^3B^5) в розсіянні домінують оптичні фонони з енергією $\hbar\omega \approx kT$ при кімнатній температурі (20-30 *meV*). В цьому випадку експоненту в бозевському розподілі (43) вже не можна розкласти за малим показником степені, й слід використовувати (43) безпосередньо. Таким чином, у полярних напівпровідниках рухливість зменшується з підвищенням температури за експонентою [16].

На рис. 8Б показано тенденцію до зменшення максимально досяжної рухливості в трьох зразках, характеризованих дедалі більшою концентрацією заряджених домішок. Мірою збільшення рухливості з підвищенням температури домінуюча роль розсіяння на заряджених домішках поступово нівелюється в конкуренції з розсіянням на фононах. Рухливість досягає свого максимуму при рівній інтенсив-

ності двох механізмів розсіяння. При подальшому підвищенні температури загальна рухливість зменшуватиметься, бо розсіяння на фонах дедалі більшою мірою переважає над розсіянням на заряджених домішках. Досягнення максимуму рухливості контролюється розсіянням на заряджених домішках. Чим більша концентрація заряджених домішок у зразку, тим вища температура потрібна для народження такої кількості фонів, розсіяння на яких має ту ж інтенсивність, що й розсіяння на заряджених домішках. При цьому величина максимуму рухливості робиться дедалі менша, а сам максимум зсувається в бік вищих температур. Вимірювання рухливості при низьких температурах дозволяє оцінити загальну концентрацію заряджених домішок у провіднику. Зазначмо, що описана вище картина суттєво ускладниться, коли провідність напівпровідника має амбіполярний характер (струм проводять як електрони, так і дірки). Докладніше обговорення практики вимірювання електрофізичних властивостей провідників в умовах квазірівноважного режиму транспорту можна знайти в [13, 14].

6.1. Температурний артефакт при вимірюванні ефекту Холла (ефект Нернста)

Повернімося до холлівської лінійки на рис. 4. Струм подається на контакт 0 і залишає провідник через контакт 5. Слід очікувати охолодження контакту 5 і нагрівання контакту 0 внаслідок ефекту Пельтьє [2]. Раніше ми «за умовчанням» вважали, що вимірювання здійснюються в ізотермічних умовах. Якщо ж підкладинка холлівської лінійки не має достатньої здатності для тепловідведення, то може виникнути градієнт температури в напрямку осі x . Як це позначиться на вимірюванні ефекту Холла?

Повернімося до транспортних рівнянь в оберненій формі для 3D провідника в дифузійному режимі [3]:

$$\frac{d(E_F / q)}{dx} = \rho J_x + S \frac{dT}{dx}, \quad J_{Qx} = TSJ_x - \kappa \frac{dT}{dx}$$

й перепишемо їх в індексних позначеннях [7]:

$$\begin{aligned} E_i &= \rho_{ij}(\vec{B})J_j + S_{ij}(\vec{B})\partial_j T, \\ J_{Qi} &= \pi_{ij}(\vec{B})J_j - \kappa_{ij}(\vec{B})\partial_j T. \end{aligned} \quad (44)$$

В ізотропному напівпровіднику всі чотири транспортні тензори діагональні, однак, у присутності магнітного поля з'являються недіагональні компоненти тензора. В слабких магнітних полях діагональні компоненти тензора не змінюються, а недіагональні компоненти з'являються з векторних добутоків сили Лоренца. Для матеріалів з кубічною симетрією транспортні коефіцієнти в присутності слабого магнітного поля можна записати так:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(\vec{B}) &= \rho_0 + \rho_0 \mu_H \epsilon_{ijk} B_k + \dots, \\ S_{ij}(\vec{B}) &= S_0 + S_1 \epsilon_{ijk} B_k + \dots, \\ \pi_{ij}(\vec{B}) &= \pi_0 + \pi_1 \epsilon_{ijk} B_k + \dots, \\ \kappa_{ij}(\vec{B}) &= \kappa_0 + \kappa_1 \epsilon_{ijk} B_k + \dots. \end{aligned} \quad (45)$$

Кожний з транспортних коефіцієнтів у слабкому магнітному полі має ту ж саму структуру в вигляді суми діагональної компоненти, позначеної індексом 0, і недіагональних компонент, які виникають з векторного добутку сили Лоренца й контролюються за знаком і за відмінністю від нуля символом Леві–Чівіта [7]. За винятком питомого опору, для якого $\rho_1 = \rho_0 \mu_H$, для решти термоелектричних коефіцієнтів недіагональні компоненти не розкриті, їм просто надано індекс 1.

Повернімося до питання, як впливає температурний градієнт в напрямку x на вимірювану холлівську напругу. З рівняння (44) одержуємо:

$$E_y = \rho_0 J_y + \rho_0 \mu_H \epsilon_{yjk} B_k J_j + S_0 \partial_y T + S_1 \epsilon_{yjk} B_k \partial_y T. \quad (46)$$

Умови проведення експерименту такі, що струм скеровано тільки вздовж осі x , а магнітне поле направлено вздовж осі z . Припустімо також, що градієнт температури вздовж осі y відсутній. За таких умов замість (46) маємо:

$$E_y = +\rho_0 \mu_H \epsilon_{yzx} B_z J_x + S_1 \epsilon_{yzx} B_z \partial_x T. \quad (47)$$

Нарешті, використовуючи значення символу Леві–Чівіта $\epsilon_{yzx} = -1$ [7], одержуємо

$$E_y = -\rho_0 \mu_H B_z J_x - S_1 B_z \partial_x T. \quad (48)$$

Перший доданок – це чистий ефект Холла. Натомість другий доданок – артефакт, спричинений градієнтом температури в напрямку x , який був створений струмом у тому ж напрямку, і який народжує додаткову компоненту електричного поля в напрямку y (ефект Нернста). З (48) випливає, що при одночасній зміні напрямку струму й магнітного поля на протилежні, доданок, що відповідає за ефект Холла, знаку не змінює, а другий доданок – змінює знак на протилежний. Таким чином, вимірявши холлівську напругу, а потім перемкнувши напрямки електричного й магнітного полів на протилежні, вимірявши холлівську напругу ще раз, і взявши середнє зі значень двох вимірювань, можна позбутися цього артефакту. Однак, це перемикання слід зробити достатньо швидко, щоб градієнт температури $\partial T / \partial x$ не встиг змінити свій знак.

Слід завжди пам'ятати: такі термомагнітні ефекти можуть спотворити інтерпретацію результатів холлівських вимірювань [16, 18]. Навіть за відсутності магнітного поля поздовжній температурний градієнт, викликаний ефектом Пельть'є, може спотворити результати вимірювання опору.

7. Вимірювання в сильних магнітних полях

При розв'язуванні кінетичного рівняння Больцмана з урахуванням магнітного поля [7] ми вважали, що магнітне поле слабе, і виконується нерівність

$$\omega \tau \ll 1, \quad (49)$$

де для параболічного закону дисперсії циклотронна частота

$$\omega_c = \frac{qB}{m^*}. \quad (50)$$

З (49) і (50) випливає умова слабкості магнітного поля

$$v \ll \frac{qB}{m^*} \tau. \quad (51)$$

Нижче ми коротко обговоримо три питання: 1) фізичний зміст умови слабкості магнітного поля (49); 2) циклотронна частота для довільного закону дисперсії $E(k)$; 3) вплив величини магнітного поля на результати вимірювань.

Повторимо стисло викладку, наведену нами раніше в [5]. На рис. 9 зображено траєкторія руху електрона в площині $k_x k_y$ під дією магнітного поля, направленого вздовж осі $+z$.

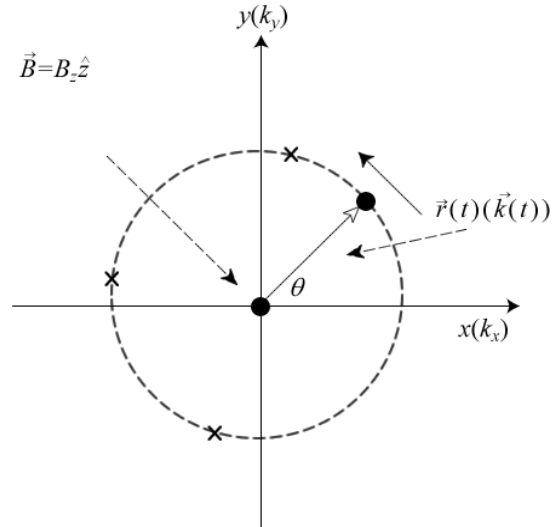


Рис. 9. До обчислення циклотронної частоти. Хрестиками на траєкторії позначено акти розсіяння. \hat{z} - орт у напрямку осі z .

Період обертання по орбіті дорівнює $T = 2\pi/\omega_c$, тому умова слабкості магнітного поля (49) еквівалентна $\omega_c \tau \ll 1$. В слабких магнітних полях період обертання електрона набагато перевищує час між двома послідовними зіткненнями, тож електрон рідко має нагоду замкнути свою колову орбіту. В сильних магнітних полях $\omega_c \tau \gg 1$ і електрони, перше, ніж зазнати розсіяння, встигають здійснити один, чи й декілька обертів навколо напрямку магнітного поля.

Рівняння руху електрона (рис. 9) – це

$$\frac{d(\hbar\vec{k})}{dt} = -q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (52)$$

або ж покомпонентно

$$\begin{aligned} \hbar \frac{dk_x}{dt} &= -qv_y B_z, \\ \hbar \frac{dk_y}{dt} &= +qv_x B_z, \end{aligned}$$

що дає (рис. 9):

$$\begin{aligned} \hbar k \frac{d(\cos \theta)}{dt} &= -q(v \sin \theta) B_z, \\ \hbar k \frac{d(\sin \theta)}{dt} &= +q(v \cos \theta) B_z. \end{aligned} \quad (53)$$

Диференціюючи за часом перше з рівнянь (53) і використовуючи друге рівняння, одержимо

$$\frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2} = -\omega_c^2 \cos \theta, \quad (54)$$

де циклотронна частота для довільної, але ізотропної зонної структури

$$\omega_c = \frac{qv}{\hbar k} B_z \quad (55)$$

Для параболічного закону дисперсії

$$v = \frac{\hbar k}{m^*},$$

що й дає вираз для циклотронної частоти (50). Вираз (55) використовують для знаходження циклотронної частоти в графені [5].

Розгляньмо декілька типових прикладів. У слабколегованому Si при кімнатній температурі рухливість складає порядку $1000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. У поширеного лабораторного магніту $B = 0.2 \text{ Тл}$, тож $\mu B \approx 0.02 \ll 1$, й ми гарантовано перебуваємо в режимі слабого магнітного поля. Не складно придбати магніт з полем, більшим на порядок, але ми все ще перебуватимемо в режимі слабких полів. Для роботи в режимі сильного магнітного поля потрібні магніти з полем, більшим на два порядки (приблизно 20 Тл і вище). Такі потужні магніти рідко використовують у рутинних дослідках.

Ситуація цілком інша для провідників з високою рухливістю, наприклад, для напівпровідників групи III–V чи для модуляційно-легованих гетероструктур. Для прикладу розгляньмо потрійну сполуку InGaAs при 300 К . У ній рухливість електронів складає приблизно $10^4 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Тоді для стандартного лабораторного магніту з $B = 0.2 \text{ Тл}$ добуток $\mu B \approx 0.2 < 1$ й ми все ще перебуваємо в режимі слабого поля. Якщо знизити температуру зразка до 77 К , або ще нижче, то цілком можна досягнути рухливості $10^5 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ і вище. Тоді $\mu B \approx 2 > 1$ й режим сильного магнітного поля вже реалізується поширеними лабораторними магнітами. В сильних полях можуть мати місце цікаві нові ефекти.

Звернімося до рівняння (54). Воно описує гармонійні коливання. Рівні енергії гармонійного осцилятора квантуються як:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c. \quad (56)$$

Рівні енергії, описувані (56), називають рівнями Ландау.

Розгляньмо 2D провідник у магнітному полі. За відсутності магнітного поля густина станів запишеться як ([1], рис. 10А)

$$D_{2D}(E) = g_v \frac{m^*}{\pi \hbar^2}, \quad (E > \varepsilon_1) \quad (57)$$

де ε_1 – дно першої підзони, при цьому ми вважаємо, що вищі підзони не заповнені, ε_1 – долина виродження напівпровідника.

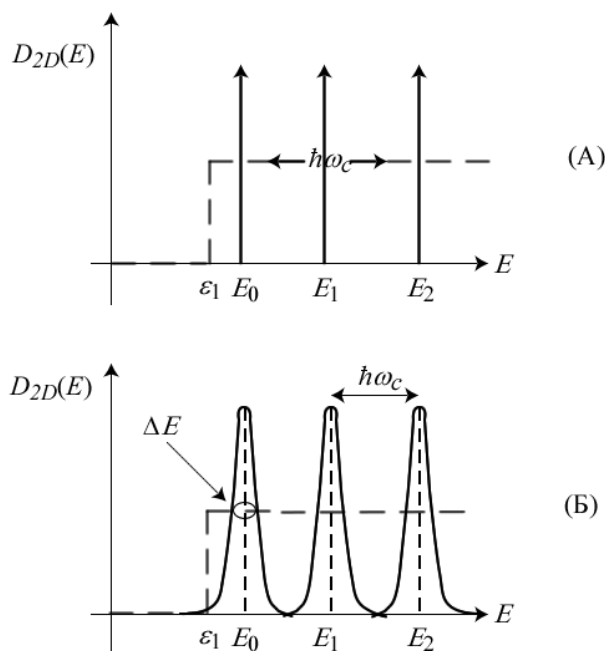


Рис. 10. Магнітне поле змінює густина станів 2D провідника: (А) Розсіяння відсутнє; (Б) Розсіяння розширює рівні Ландау.

За присутності сильного магнітного поля рух електрона стає квантований за всіма трьома напрямками і густина станів визначається сумою δ -функцій [10]:

$$D_{2D}(E, B_z) = D_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta \left[E - \varepsilon_1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \right], \quad (58)$$

де D_0 – виродження одного рівня Ландау. Оскільки відстань між рівнями Ландау $\hbar \omega_c$, виродження одержимо множенням цієї енергетичної відстані на густина станів (57) :

$$D_0 = \hbar \omega_c \left(g_v \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \right) = g_v \frac{2qB_z}{h} \quad (59)$$

Розсіяння розширює рівні Ландау (рис. 10Б). Ширина кожного рівня визначається співвідношенням невизначеностей $\Delta E \Delta t \approx \hbar$. Показавши близьким до часу розсіяння, $\Delta \approx$, одержимо $\Delta \approx \hbar$. Сильне магнітне поле визначається як поле, достатнє для розрізнення окремих рівнів Ландау. Для цього відстань між рівнями Ландау повинна перевищити розширення окремої лінії, що веде до відомої нерівності $\omega \tau \gg$ й тим самим демонструє ще одну фізичну інтерпретацію нерівності (49). При цьому спінове розщеплення рівнів Ландау ми знехтували.

7.1. Осциляції Шубнікова – де Гааза й квантовий ефект Холла

Цікаві ефекти виникають при вимірюванні опору й ефекту Холла в змінюваному сильному магнітному полі. Нехай у нас є модуляційно-легована плівка з $n_s = 5 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ та рухливістю $\mu = 1 \times 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$. Визначимо, скільки рівнів Ландау заселено, якщо $B_z = 1 \text{ Тл}$.

Спочатку слід визначити, чи розрізняються окремі рівні Ландау. Для рухливості $\mu = 1 \times 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с} = 10 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ маємо:

$$\mu B_z = 10 \gg 1 \quad (60)$$

й ми явно перебуваємо в режимі сильного магнітного поля. Далі обчислюємо виродження рівнів Ландау. Вважаючи, що, одержуємо

$$D_0 = \frac{2qB_z}{h} = 4.8 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}, \text{ і, відповідно,}$$

$$\frac{n_s}{D_0} = 10.4,$$

що означає: перші 10 рівнів Ландау заселені, а рівень Фермі лежить у проміжку між 10-м та 11-м рівнями Ландау.

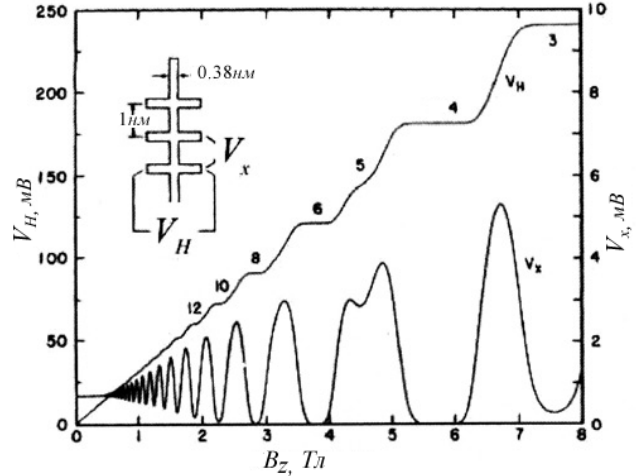


Рис. 11. Холлівські вимірювання модуляційно-легованої структури AlGaAs/GaAs в сильному магнітному полі при 1.2 К. Інжектований струм – 25.5 мкА, і поверхнева концентрація $n_s = 5.6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ [19].

Рис. 11 зображує результати вимірювань характеристик такої структури [19].

Розгляньмо спочатку поздовжній опір $R_{xx} = V_x I$ (відповідну напругу відкладено по правій осі на рис. 11). При слабких полях опір не залежить від магнітного поля і є опором матеріалу. Зі збільшенням магнітного поля R_{xx} починає осцилювати. Осциляції стають дедалі більшими мірою того, як усе більше виявляється квантованість спектру електронів у сильному магнітному полі (рівні Ландау). Ці осциляції опору R_{xx} (і відповідної напруги V_{xx}) відомі як осциляції Шубнікова – де Гааза [20, 21]. Їх у 1930 році відкрили на зразках вісмуту з малою кількістю домішок голландський фізик Ван дер де Гааз і український фізик, фундатор кріогенної лабораторії в Українському фізико-технічному інституті в Харкові Лев Шубніков (на жаль, ученого було розстріляно в 1937 році через безглузде політичне звинувачення, і навіть його ім'я в назві відкритого ним ефекту в СРСР до кінця 1950-х років згадувати було заборонено). Період цих осциляцій дозволяє виміряти поверхневу концентрацію електронів [22]. Коли магнітне поле стає дуже сильним, виникають ділянки за віссю абсцис, де опір R_{xx} фактично зануляється й напруга на відповідних контактах не падає (рис.

11). За таких умов спостерігається квантовий ефект Холла [19, 22 – 25].

Поведінку холлівської напруги зі зміною магнітного поля зображено на рис. 11 (ліва вісь). В слабких магнітних полях холлівська напруга пропорційна полю, як це й має бути згідно з (18). Однак із переходом до сильних магнітних полів починається квантування холлівської напруги, яке супроводжується зростанням висоти й ширини сходинок квантування. Відповідно, має місце й квантування Холлівського опору згідно зі співвідношенням

$$R_H = \frac{h}{q^2} \frac{1}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (61)$$

Вперше цілочисельний квантовий ефект Холла (ЦКЕХ) спостерігав Клаус фон Клітцинг з колегами [26]. Константа $\frac{h}{q^2} = 25812.807 \dots \Omega$ носить тепер назву сталої

Клітцинга і є міжнародним еталоном для визначення значення одиниці опору Ω . Самі сходинок квантованого опору (61), як видно з рис.11, за інтервалом полів відповідають ділянкам занулення R_{xx} . Пізніше було відкрито й дробовий квантовий ефект Холла (див. напр. [27]), де у (61) може набувати також певних дробових значень $2/7, 1/3, 2/5, 3/5, 5/2$ тощо.

Вигляд залежностей на рис.11 відразу наводить на думку, що ЦКЕХ пов'язаний з заповненням чергових рівнів Ландау електронами зі зменшенням магнітного поля. Адже зі зростанням магнітного поля циклотронна частота (50) збільшується, і, врешті-решт, навіть перший рівень Ландау, описуваний в (56), опиниться над рівнем Фермі, який визначається поверхневою концентрацією електронів (її в реальних експериментах з двовимірними провідниками регулюють напругою на металевому затворі, розташованому під діелектриком, який є підкладкою для досліджуваного провідника – маємо звичайний плоский конденсатор). Використовуючи (59), легко показати, що n -й рівень Ландау буде повністю заповнено електронами при зменшенні магнітного поля від максимального (за якого жоден рівень не перебуває нижче рівня Фермі) до значення

$$B_n = \frac{1}{n} \frac{h n_s}{q}. \quad (62)$$

Надалі ми використаємо вираз для Холлівського опору (18), а також очевидні співвідношення

$$V_H = WB \langle v_x \rangle \quad I = W n_s q \langle v_x \rangle, \quad (63)$$

де W – ширина провідника, $\langle v_x \rangle$ – середня дрейфова швидкість електронів. Зазначмо що перше з цих співвідношень є наслідком вимоги рівності сили Лоренца, яка діє на електрони з боку магнітного поля, і сили, спричиненої напруженістю холлівського електричного поля між протилежними межами провідника: $qE_y = qB_z \langle v_x \rangle$. Підставивши спершу ці співвідношення у (18), а далі (62) – в отриманий результат, ми отримаємо значення холлівського опору, описувані (61), для таких значень магнітного поля, коли рівень Фермі опиняється точно посередині між рівнями Ландау. В цих точках всі рівні Ландау нижче рівня Фермі повністю заповнені електронами, а вище – порожні. Але природа поличок для холлівського опору в достатньо широкому інтервалі полів навколо таких точок (див. рис. 11) з цього простого опису не впливає і потребує додаткових пояснень.

Для значення магнітного поля, описуваного (62), рівень Фермі потрапляє в проміжок між n -м та $(n+1)$ -м рівнем Ландау, і, згідно з формулою Ландауера, поздовжній опір R_{xx} при цьому має бути максимальний. Натомість, як показує експеримент (рис.11), він при таких значеннях поля зануляється. Пояснення природи ЦКЕХ викладено в [25]. Точні вирази для провідності і для питомого опору в двовимірній системі показують, що в граничному випадку сильного магнітного поля $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$, і $\rho_{xx} \rightarrow 0$ (хоч з формули Ландауера на позір має впливати $\sigma_{xx} \rightarrow 0$, але такий хибний висновок базується тільки на врахуванні розташування рівня Фермі між рівнями Ландау, і не враховує складної залежності довжини вільного пробігу від магнітного поля). Якісно ЦКЕХ в двовимірному провіднику можна пояснити на основі моделі крайових станів. Біля краю провідника формується електричне поле, яке перешкоджає елек-

тронам виходити за його межі. Воно призводить до залежності початку відліку енергії для рівнів Ландау, який в (56) ми поклали рівним нулеві, від координати (рис. 12).

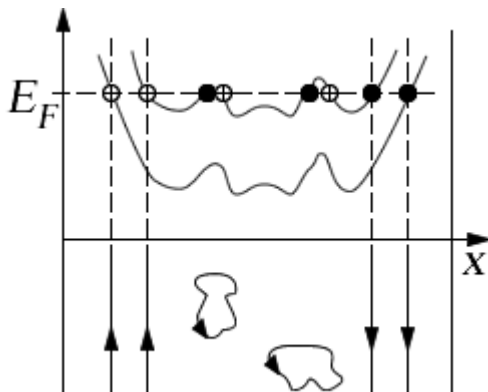


Рис. 12. До природи крайових станів: електрони дрейфують уздовж ліній постійної енергії, утворюючи локалізовані й крайові струмові стани.

Як це зображено на рис. 12, рівні Ландау в силу цього вигинаються біля країв угору. В схрещеному електричному й магнітному полях заряджені частинки дрейфують уздовж еквіпотенціальних ліній. Оскільки електрони підкоряються статистиці Фермі – Дірака й при низьких температурах заповнюють усі стани до рівня Фермі, то за умови коли рівень Фермі вдалині від країв розташований між рівнями Ландау, а фактор заповнення цих рівнів $\frac{n_s}{D_o}$ близький до цілого числа, то вдалині від країв (усередині провідника) формуються локалізовані стани, які не беруть участі в провідності, а біля країв – крайові струмові стани.

Можна показати [27]: струм, що переноситься кожним крайовим станом, квантований і дорівнює $I_{partial} = \frac{q^2}{h} V_H$. А число крайових каналів ціле й визначається фактором заповнення $\frac{n_s}{D_o}$. Тому загальний струм через зразок дорівнює

$$I = \frac{q^2}{h} V_H \frac{n_s}{D_o}. \quad (64)$$

З урахуванням (18) і (62) це еквівалентне квантованим значенням холлівського опору (61). Оскільки значення $\frac{n_s}{D_o}$, що входить до (61), є цілою частиною співвідношення $\frac{n_s}{D_o}$,

залежність холлівського опору від поля можна використати для прецизійного визначення поверхневої концентрації [22].

8. Висновки

Підведемо підсумки. Холлівська лінійка і вимірювальні геометрії ван дер Пау дозволяють виміряти як опір, так і холлівську концентрацію й холлівську рухливість. За бажання можна оцінити й холлівський фактор, що дозволить точніше визначити поверхневу концентрацію електронів і їхню справжню рухливість. Однак, на практиці зазвичай наводять холлівську концентрацію та холлівську рухливість. Температурні вимірювання допомагають ідентифікувати домінуючий механізм розсіяння. Холлівські вимірювання потребують особливої ретельності з метою уникнути виявів гальвано- і термомагнітних ефектів, таких, як ефект Нернста. Суттєво нову інформацію можуть дати вимірювання в сильних магнітних полях, однак для таких експериментів потрібні матеріали з достатньо високою рухливістю електронів.

На завершення наголосимо: стаття є наслідком прослуховування одним з нас (ЮОК) курсів лекцій «Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications» та «Nanoscale Transistors», прочитаних он-лайн в 2011 та 2016 роках проф. Марком Лундстромом (Mark Lundstrom), а також «Fundamentals of Nanoelectronics, Part I: Basic Concepts», прочитаних он-лайн в 2012 і 2015 роках проф. Супрійо Датта (Supriyo Datta) в рамках ініціативи Purdue University / nanoHUB-U [www.nanohub.org/u]. В ній також використано напрацювання авторського курсу «Фізика конденсованого середовища», який інший автор (МВС) упродовж останніх років читає для магістрів радіофізичного факультету Київського національного університету імені Т. Г. Шевченка.

Авторі щиро вдячні Н. Ю. Кругляк за допомогу в роботі над статтею і в підготовці її до друку.

Список використаної літератури

- [1]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Uzahalnena model elektronnoho transportu v mikro- i nanoelektronitsi* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2015. – t. 12, No. 3. S. 4 – 27 (in Ukrainian).
- [2]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Termoelektrychni yavyshcha ta prystroi z pozytsii uzahalnenoї modeli transportu elektroniv* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2015. – t. 12, No. 4. S. 5 – 18 (in Ukrainian).
- [3]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Termoelektrychni koefitsiienty v uzahalnenii modeli transportu elektroniv* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2016. – t. 13, No. 1. S. 5 – 23 (in Ukrainian).
- [4]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Transport tepla fononamy v uzahalnenii modeli Landauera-Datta-Lundstroma* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2016. – t. 13, No. 2. S. 16 – 35 (in Ukrainian).
- [5]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Transportni yavyshcha v hrafeni v uzahalnenii modeli Landauera-Datta-Lundstroma* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2016. – t. 13, No. 3. S. 5 – 29 (in Ukrainian).
- [6]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Urakhuvannia rozsiiannia v uzahalnenii modeli Landauera-Datta-Lundstroma* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2016. – t. 13, No. 4. – S. 5-18.
- [7]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. *Kinetychne rivniannia Boltsmana v uzahalnenii modeli transportu elektroniv u mikro- ta nanoelektronitsi* // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2017. – t. 14, No. 1, – S. 5 – 20.
- [8]. Datta Supriyo. *Lessons from Nanoelectronics: A New Perspective on Transport*. Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2012; www.nanohub.org/courses/FoN1.
- [9]. Lundstrom Mark, Jeong Changwook. *Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications*. Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2013; www.nanohub.org/resources/11763.
- [10]. Yu. A. Kruglyak. *Nanoelektronika «snizu - vverh»*, Odessa: TES, 2015. (in Russian)
- [11]. L. Danielson. Measurement of the thermoelectric properties of bulk and thin film materials, www.osti.gov/scitech/biblio/663573, 1996.
- [12]. H. H. Berger. Models for contacts to planar devices, *Solid-State Electron.*, v. 15, 145 – 158 (1972).
- [13]. D. K. Schroder. *Semiconductor Material and Device Characterization*, Wiley Interscience, New York, 2006.
- [14]. D. C. Look. *Electrical Characterization of GaAs Materials and Devices*, New York: John Wiley and Sons, 1989.
- [15]. L. J. van der Pauw. A method for measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape, *Phillips Res. Rep.*, v. 13, 1 – 9 (1958).
- [16]. Mark Lundstrom. *Fundamentals of Carrier Transport*. Cambridge UK: Cambridge University Press, 2000.
- [17]. N. Ashcroft, N. Mermin, *Fizika tverdogo tela* (Moskva: Mir: 1979) (in Russian).
- [18]. C. M. Wolfe, N. Holonyak, G. E. Stillman. *Physical Properties of Semiconductors*, Englewood Cliffs, N. Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [19]. M. E. Cage, R. F. Dziuba, B. F. Field. A test of the quantum Hall effect as a resistance standard, *IEEE Trans. Instrument. Measure.*, v. IM-34, 301 – 303 (1985).
- [20]. L. W. Schubnikov, W. J. de Haas. *Proc. Royal Netherl. Acad. Arts Science*, v. 33, 130 (1930).
- [21]. L. W. Schubnikov, W. J. de Haas. *Proc. Royal Netherl. Acad. Arts Science*, v. 33, 163 (1930).
- [22]. D. F. Holcomb. Quantum electrical transport in samples of limited dimensions, *Amer. J. Phys.*, v. 67, 278 – 297 (1999).
- [23]. J. H. Davies. *The physics of Low-Dimensional Semiconductors*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [24]. S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [25]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha, *Uroky nanoelektroniky: efekt Kholla i vymiriuvannia elektrokhimichnykh potentsialiv u kontseptsii «znyzu-vhoru»*. Sens. elektron.

mikrosist. tehnol., t. 11, No 1: 5 – 27 (2014) (*in Ukrainian*).

[26]. K. V. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Phys. Rev. Lett.* v. 45, 494 (1980).

[27]. David Tong. *The Quantum Hall Effect. TIFR Infosys Lectures.* <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html>

Стаття надійшла до редакції 02.04.2017 р.

UDC 538.935 PACS numbers: 72.10.-d, 72.20.Dp, 72.20.Fr, 72.90.+y, 73.63.-b
DOI <http://dx.doi.org/10.18524/1815-7459.2017.2.106603>

MEASURING OF CONDUCTIVITY AND ANALYSIS OF ELECTROPHYSICAL CHARACTERISTICS OF TRANSISTORS WITHIN GENERALIZED MODEL OF ELECTRON TRANSPORT

Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha

Odesa State Environmental University,
Faculty of Computer Sciences
15 Lvivska Str, Odesa, Ukraine

* Taras Shevchenko Kyiv National University
Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Sciences,
4g Hlushkov Av, Kyiv, Ukraine
V. E. Lashkaryov Institute of Semiconductor Physics, NAS of Ukraine,
41 Nauky Av, Kyiv, Ukraine

Summary

In a tutorial article directed to serve researchers, university teachers and students, we discuss experimental methods for measuring the resistance in the frame of the generalized transport Landauer – Datta – Lundstrom (LDL) model, including measurements under applied external magnetic field, namely: method of variable resistor length, four-point measurement scheme, the classical method of the Hall effect measurement and different variants of the van der Pauw method, temperature measurements and accounting for artifacts (Nernst effect), measurements in strong magnetic fields (Shubnikov–de Haas effect).

Hall effect setup and van der Pauw measuring geometry enables to measure both the resistance and Hall concentration / Hall mobility. We also can estimate Hall factor, which enables to determine surface concentration of electrons and their real mobility more precisely. Temperature measurements permit to identify the dominant scattering mechanism. Hall measurements need special accuracy in order to avoid the influence of galvanic and thermomagnetic effects, such as Nernst effect. Measurements in strong magnetic fields can supply with essentially new information, however, they need materials with rather high mobility of electrons.

Keywords: nanophysics, nanoelectronics, resistance measurement, van der Pauw method, Hall effect, thermal measurement, artifact measurement, Nernst effect, Shubnikov – de Haas effect

УДК 538.935 PACS numbers: 72.10.-d, 72.20.Dp, 72.20.Fr, 72.90.+y, 73.63.-b
DOI <http://dx.doi.org/10.18524/1815-7459.2017.2.106603>

ВИМІРЮВАННЯ ПРОВІДНОСТІ Й АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНЗИСТОРІВ У РАМКАХ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТУ ЕЛЕКТРОНІВ

Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха

Одеський державний екологічний університет,
факультет комп'ютерних наук,
вул. Львівська, 15, Одеса, Україна
тел. (067) 725 2209, *E-mail: quantumnet@yandex.ua*
* Київський національний університет ім.Т. Шевченка,
факультет радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем,
пр. Глушкова, 4г, Київ, Україна, тел. (044) 526 0532;
Інститут фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України,
пр. Науки, 41, Київ, Україна, тел. (044) 525 6033,
E-mail: maksym_strikha@hotmail.com

Реферат

У методичній статті, розрахованій на науковців, викладачів та студентів вищої школи, обговорено експериментальні методи вимірювання опору в узагальненій моделі транспорту електронів Ландауера – Датта – Лундстрома (ЛДЛ), зокрема, в умовах прикладання зовнішнього магнітного поля: метод змінної довжини провідника, чотириточкову схему вимірювань, класичний метод вимірювання ефекту Холла й різні варіанти методу ван дер Пау, а також температурні вимірювання й урахування артефактів (ефект Нерста), вимірювання в сильних магнітних полях (ефект Шубнікова – де Гааза).

Показано, що холлівська лінійка і вимірвальні геометрії ван дер Пау дозволяють виміряти як опір, так і холлівську концентрацію й холлівську рухливість. За бажання можна оцінити й холлівський фактор, що дозволить точніше визначити поверхневу концентрацію електронів і їхню справжню рухливість. Однак, на практиці зазвичай наводять холлівську концентрацію та холлівську рухливість. Температурні вимірювання допомагають ідентифікувати домінуючий механізм розсіяння. Холлівські вимірювання потребують особливої ретельності з метою уникнути виявів гальвано- і термомагнітних ефектів, таких, як ефект Нерста. Суттєво нову інформацію можуть вимірювання в сильних магнітних полях, однак для таких експериментів потрібні матеріали з достатньо високою рухливістю електронів.

Ключові слова: нанофізика, наноелектроніка, вимірювання опору, метод ван дер Пау, ефект Холла, температурні вимірювання, врахування артефактів, ефект Нерста, ефект Шубнікова – де Гааза