

## ПРОЕКТУВАННЯ І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕНСОРІВ

## SENSORS DESIGN AND MATHEMATICAL MODELING

УДК 621.396.6-973

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В КРІОТРОНАХ НА ОСНОВІ СКВІДІВ

*М. В. Тиханський, А. І. Партика*

Національний університет “Львівська політехніка”, 79013, м. Львів,  
вул. С. Бандери, 12, тел. 38-032 2582140, факс: 38-032 2582140, Україна,  
E-mail: andrij14@rambler.ru

#### Анотація

#### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В КРІОТРОНАХ НА ОСНОВІ СКВІДІВ

*М. В. Тиханський, А. І. Партика*

Використовуючи еквівалентну схему та принцип роботи двоконтактного надпровідного квантового інтерферометра (СКВІДа) як елемента комп'ютерної пам'яті, створено математичну модель перехідних процесів у таких елементах пам'яті. Розраховано перехідні характеристики квантових кріотронів при керуванні їх логічним станом імпульсами магнітного потоку для логічних переходів “0”→“1” та “1”→“0”. Показано, що стабільно працювати такі кріотрони можуть тільки при логічних переходах “0”→“1”. Досліджено вплив на перехідні характеристики кріотронів амплітуди керуючих імпульсів і середньої тривалості імпульсів.

**Ключові слова:** СКВІД, квантова комірка пам'яті, джозефсонівський кріотрон, перехідна характеристика, логічний перехід, надпровідний інтерферометр.

#### Abstract

#### A MATHEMATICAL MODEL OF TRANSITIONAL PROCESSES IN CRYOTRONS BASED SQUIDS

*M. V. Tyhanskyi, A. I. Partyka*

Using an equivalent circuit and the operational principle of a two-terminal Superconducting Quantum Interference Device (SQUID) as a computer memory cell, a mathematical model of transitional processes in such quantum cryotrons has been created. The magnetic flux regulated logic-state transitional characteristics of quantum cryotrons are calculated for logic transitions “0”→“1” and “1”→“0”. We show that stable functioning of these cryotrons is possible only for logic transitions “0”→“1”. The influence of the amplitude of the regulating magnetic flux impulses and the average duration of an impulse on the transitional characteristics of cryotrons is investigated.

**Key words:** SQUID, the quantum memory cell, Josephson cryotron, the transition characteristics, the logical transition, superconducting interferometer.

## Аннотация

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В КРИОТРОНАХ НА ОСНОВЕ СКВИДОВ

М. В. Тиханський, А. І. Партика

Используя эквивалентную схему и принцип работы двоконтактного сверхпроводящего квантового интерферометра (СКВИДа) как элемента компьютерной памяти, создана математическая модель переходных процессов в таких элементах памяти. Рассчитаны переходные характеристики квантовых криотронов при управлении их логическим состоянием импульсами магнитного потока для логических переходов “0”→“1” та “1”→“0”. Показаны, что стабильно работать такие криотроны могут только при логических переходах “0”→“1”. Исследовано влияние на переходные характеристики криотронов амплитуды управляющих импульсов и средней продолжительности импульсов.

**Ключевые слова:** СКВИД, квантовая ячейка памяти, джозефсоновский криотрон, переходная характеристика, логический переход, сверхпроводящий интерферометр.

## Вступ

Відкриття високотемпературних надпровідників і прогрес технологій виготовлення кріоелектронних мікроструктур привело до практичного використання створених на основі ефектів Джозефсона квантових електронних комірок пам'яті [1-4]. Перспективність їх застосування в комп'ютерній техніці визначається високою швидкістю порівняно із традиційними напівпровідниковими елементами. В даний час ведуться наукові дослідження фундаментальних фізичних процесів в джозефсонівських тунельних переходах (ДТП) та джозефсонівських тунельних контактах (ДТК). Створені на основі ДТП та ДТК криотрони можна використовувати як надшвидкодійні елементи комп'ютерної пам'яті [5-9]. Основними характеристиками криотронів є перехідні характеристики, які визначають час комутації при логічних переходах і швидкість елементів пам'яті. В роботах [5,7,9] було створено і вдосконалено математичну модель перехідних процесів в джозефсонівських криотронах на основі окремих ДТП. Метою цієї роботи було створити математичну модель перехідних процесів в криотронах на основі СКВИДів, дослідити наскільки модель правильно описує складні перехідні процеси під час зміни логічного стану криотрона та отримати перехідні характеристики криотронів і встановити вплив параметрів схеми на стабільність режиму роботи.

## Принцип роботи криотрона на основі двоконтактного СКВИДа

Схема криотрона на основі двоконтактного СКВИДа приведено на рис. 1. СКВИД утворений надпровідною рамкою, у яку вмонтовано два слабкі зв'язки — джозефсонівські тунельні переходи (ДТП) а і б. Кожен ДТП може пропускати надпровідний тунельний струм силою  $I$ , яка не перевищує його критичного величину (критичний струм ДТП)  $I_C$ . Через СКВИД пропускають транспортний струм силою  $I_T$ , який є трохи меншим за величину  $2I_C$ . Значення струмів  $I_A$  і  $I_B$ , які протікають через переходи а і б відповідно не досягають критичної величини  $I_C$ , тому напруга на обидвох контактах дорівнюватиме нулю. Це означає, що і напруга на криотроні дорівнюватиме нулю. Стан криотрона, коли через нього протікає транспортний струм  $I_T$ , а напруга на ньому  $V = 0$ , вважають станом логічного “0”.

Під час подачі керуючого імпульсу зовнішнього магнітного потоку  $\Phi$  у контурі інтерферометра починає протікати індукований струм  $I_I$ . В результаті сила струму в а-контакті  $I_A = \frac{1}{2} I_T - I_I$  ( $I_A < I_C$ ), а в б-контакті  $I_B = \frac{1}{2} I_T + I_I$  ( $I_B > I_C$ ). В а-контакті надпровідне тунелювання збережеться, оскільки  $I_A < I_C$ , а в б-контакті надпровідне тунелювання буде зруйновано, бо  $I_B > I_C$ . Після цього почнеться перерозподіл струмів у інтерферометрі: струм  $I_B$  зменшиться до нуля, це приведе до того, що

зникне індукований струм  $I_I$ , а сила струму  $I_A$  досягне величини  $I_T$ , яка значно перевищуватиме критичний струм  $I_C$ . Надпровідне тунелювання в а-контакті буде також зруйноване. На кріотроні з'явиться напруга  $V \neq 0$ . Такий стан кріотрона вважають станом логічної "1", а описаний перехідний процес називають логічним переходом "0" → "1". Для зворотного логічного переходу "1" → "0" потрібне відновлення надпровідного джозефсонівського тунелювання в обидвох контактах і встановлення нульової напруги на кріотроні при незмінному значенні транспортного струму  $I_T$ .

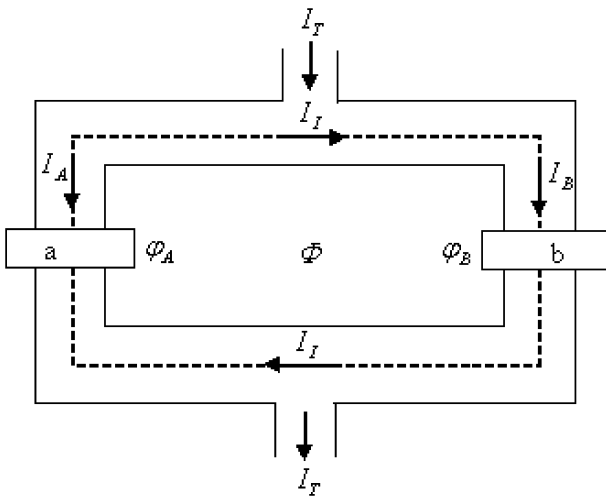


Рис. 1. Схема кріотрона на основі двоконтактного СКВІДа.  $I_T$  — транспортний струм;  $I_I$  — індукований струм;  $I_A$  — тунельний струм через а-контакт;  $I_B$  — тунельний струм через б-контакт;  $\Phi$  — керуючий зовнішній магнітний потік;  $\varphi_A$  — стрибок фази на а-контакті;  $\varphi_B$  — стрибок фази на б-контакті

### Математична модель перехідних процесів в кріотронах на основі двоконтактного СКВІДа

Для створення математичної моделі було складено робоче диференціальне рівняння. Використано такі співвідношення [10-11]:

$$I_T = I_A + I_B, \quad (1)$$

$$I_A = I_C \sin \varphi_A + \frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2 \varphi_A}{dt^2} + \frac{G(V)\hbar}{2e} \frac{d\varphi_A}{dt}, \quad (2)$$

де  $I_C \sin \varphi_A$  — надпровідний тунельний струм в а-контакті,  $\varphi_A$  — стрибок фази на а-контакті,  $\frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2 \varphi_A}{dt^2}$  — ємнісний струм в а-контакті,

$C$  — ємність джозефсонівського тунельного переходу,  $\hbar$  — стала Планка,  $e$  — заряд електрона,  $\frac{G(V)\hbar}{2e} \frac{d\varphi_A}{dt}$  — нормальний струм під час одноелектронного тунелювання в а-контакті,  $G(V)$  — нормальна провідність ДТП,

$$I_B = I_C \sin \varphi_B + \frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2 \varphi_B}{dt^2} + \frac{G(V)\hbar}{2e} \frac{d\varphi_B}{dt}, \quad (3)$$

де  $I_C \sin \varphi_B$  — надпровідний тунельний струм в б-контакті,  $\varphi_B$  — стрибок фази на б-контакті,  $\frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2 \varphi_B}{dt^2}$  — ємнісний струм б-контакті,  $\frac{G(V)\hbar}{2e} \frac{d\varphi_B}{dt}$  — нормальний струм під час одноелектронного тунелювання б-контакті,

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (4)$$

де  $\Phi$  — керуючий зовнішній магнітний потік через інтерферометр,  $\Phi_0$  — квант магнітного потоку.

Після підстановок і математичних перетворень робоче диференціальне рівняння стало таким:

$$I_T = I_C \sin \left[ \varphi_B + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right] + I_C \sin [\varphi_B] + \frac{2G\hbar}{2e} \frac{d\varphi_B}{dt} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{G\hbar}{2e} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{2C\hbar}{2e} \frac{d^2 \varphi_B}{dt^2} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2 \Phi}{dt^2}. \quad (5)$$

Задаючи функцію  $\Phi(t)$ , яка описувала форму керуючих імпульсів зовнішнього магнітного потоку і розв'язавши рівняння (5), знаходили невідому функцію  $\varphi_B(t)$  (часову залежність стрибка фази на одному з ДТП інтерферометра). Використовуючи основне співвідношення для нестационарного ефекту Джозефсона

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (6)$$

можна визначити часову залежність напруги на кріотроні  $V(t)$  — його перехідну характеристику, яка описує перехідні процеси під час логічних переходів "0" → "1" і "1" → "0". Для отримання перехідних характеристик кріотронів використовували програмний пакет Mathcad 7 Professional.

### Перехідні характеристики кріотронів

Величину критичного струму для обидвох джозефсонівських контактів задавали  $I_C = 10$  мА, величину транспортного (робочого) струму встановили  $I_T = 18$  мА виходячи з двох міркувань:

1) значення  $I_T$  не повинно перевищувати критичний струм інтерферометра  $2I_C$ ;

2) різниця  $2I_C - I_T$  повинна бути мінімальною, що дозволить керувати логічним станом кріотрона імпульсами магнітного потоку малої амплітуди.

Ємність джозефсонівських переходів  $C$  встановлювали методом підбору виходячи з критерію максимальної швидкодії кріотрона як комірки пам'яті. Отримано, що перехідні характеристики були найкращими для значення ємності  $C = 1,4$  пФ. Робочу температуру кріотрона ми вибрали  $T = 11,6$  К. На основі ВАХ окремих джозефсонівських контактів для цієї температури задавали залежність нормальної провідності ДТП від напруги, яку використовували у робочому рівнянні (5). Нахил ВАХ до осі напруг задавали параметром  $G_0$  (провідністю ДТП в нормальному стані, коли напруга на тунельному контакті  $V \gg \frac{2\Delta}{e}$ , де  $\Delta$  — енергетична щілина,  $e$  — заряд електрона). Перехідні характеристики кріотрона були оптимальними, коли параметр  $G_0 = 0,7$  Ом<sup>-1</sup>.

Керування логічним станом кріотрона здійснювалось імпульсами магнітного потоку, форму яких описувала функція

$$\Phi(t) = N\Phi_0 \exp\left[-\left(\frac{t-t_n}{\Delta t_n}\right)^4\right].$$

Тут  $N\Phi_0$  — амплітуда керуючих імпульсів,  $N$  — параметр, який задавав амплітуду керуючих імпульсів,  $t_n$  — момент подачі  $n$  — імпульсу,  $\Delta t_n$  — середня тривалість  $n$  — імпульсу,  $\Phi_0$  — квант магнітного потоку. Форма імпульсів була вибрана на основі досліджень, які проведені в попередніх роботах [7,9].

На рис. 2. приведено перехідну характеристику кріотрона  $V(t)$  під час логічного переходу “0”→“1”. Для моделювання використано такі параметри кріотрона та керуючих імпульсів магнітного потоку: сила критичного струму ДТП  $I_C = 10$  мА, сила транспортного струму  $I_T = 18$  мА, ємність ДТП  $C = 1,4$  пФ, нормальна провідність  $G_0 = 0,7$  Ом<sup>-1</sup>, робоча температура  $T = 11,6$  К, момент подачі керуючого

імпульсу  $t_1 = 25$  пс (моментом подачі керуючого імпульсу вважатимемо той момент часу, коли миттєве значення магнітного потоку досягає максимуму), середня тривалість керуючого імпульсу  $\Delta t_1 = 1$  пс, амплітуда керуючого імпульсу  $\Phi = 10\Phi_0$ . Параметри кріотрона та керуючих імпульсів магнітного потоку задані оптимальними, вони визначались методом підбору виходячи з максимальної швидкодії кріотрона. З рис. 2 видно, що перехід зі стану логічного “0” ( $V = 0$ ) у стан логічної “1” ( $V \neq 0$ ) відбувся за час  $\tau \sim 5$  пс. Цей час будемо вважати часом комутації кріотрона.

Якщо порівняти ці результати з даними роботи [9], де були отримані перехідні характеристики джозефсонівських кріотронів на основі окремих ДТП, то треба відмітити, що логічні переходи “0”→“1” мали приблизно такий самий час комутації. Проте є суттєва різниця у тривалості зовнішнього керуючого імпульсу, який здійснює логічний перехід. Для кріотронів на основі ДТП тривалість керуючих імпульсів у оптимальному режимі роботи була 4 — 5 пс. У нашому випадку оптимальною тривалістю керуючих імпульсів магнітного потоку можна вважати 0,2 — 1 пс, що є значно меншою величиною.

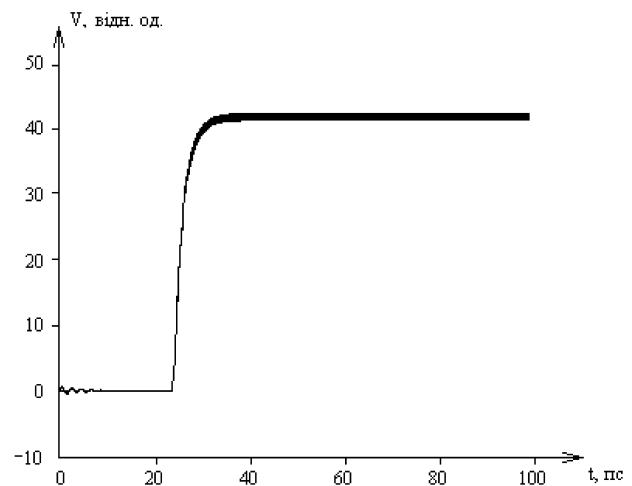


Рис. 2. Перехідна характеристика кріотрона  $V(t)$  при логічному переході “0”→“1”.

Якщо середню тривалість керуючих імпульсів  $\Delta t$  зменшувати, то спочатку час комутації зростає, а коли  $\Delta t = 0,03$  пс чи був меншим, логічний перехід “0”→“1” не відбувався (рис. 3). Замість логічного переходу спостерігались тільки згасаючі коливання напруги малої амплітуди. Збільшення тривалість керуючих імпульсів  $\Delta t$  до 2,7 пс (рис. 4) вело до знижен-

ня швидкодії кріотрона і появи на його перехідних характеристиках згинів після логічного переходу "0"→"1". Час комутації зростав до величини  $\tau \approx 10$  пс. Якщо середню тривалість імпульсів магнітного потоку задавати так, щоб  $0,1 \text{ пс} < \Delta t < 2 \text{ пс}$ , час комутації майже не змінювався.

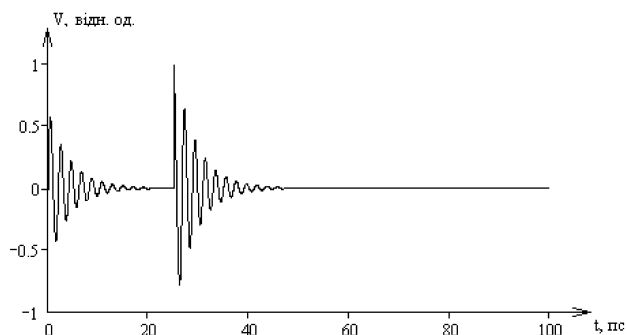


Рис. 3. Перехідна характеристика кріотрона  $V(t)$  при логічному переході "0"→"1".

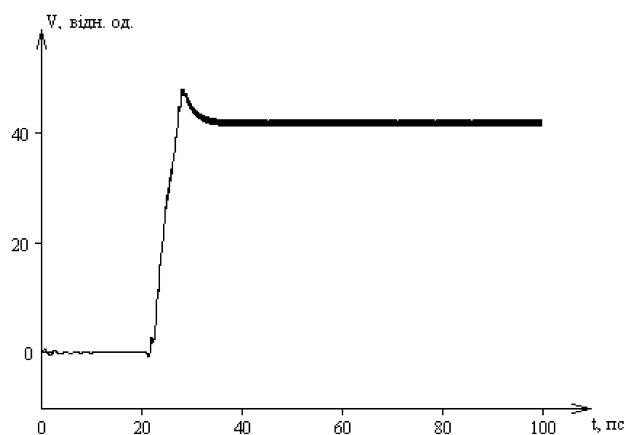


Рис. 4. Перехідна характеристика кріотрона  $V(t)$  при логічному переході "0"→"1".

Змінюючи параметр  $N$ , можна було змінювати амплітуду керуючих імпульсів магнітного потоку  $\Phi = N\Phi_0$ . Отримавши перехідні характеристики кріотронів під час керування їх логічним станом імпульсами потоку різної амплітуди, ми встановили, що на швидкодію кріотронів цей параметр практично не впливає. Але при зменшенні параметра  $N$  до 1 і менше логічний перехід "0"→"1" не відбувався. На перехідній характеристиці кріотрона спостерігались тільки згасаючі коливання напруги малої амплітуди, тобто амплітуда коливань напруги була набагато меншою за напругу на кріотроні у стані логічної "1" (рис. 5). Цей результат є важливим з точки зору стабільності режиму роботи кріотронів.

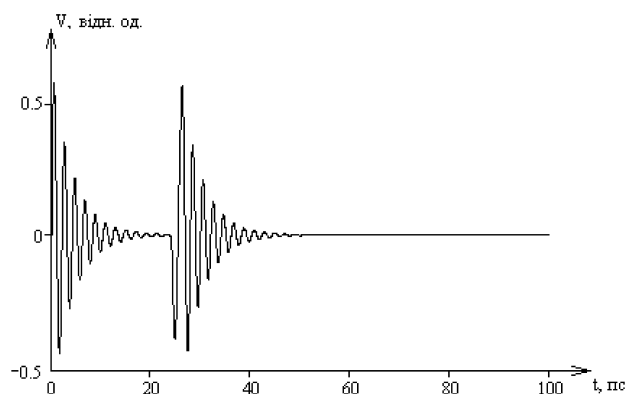


Рис. 5. Перехідна характеристика кріотрона  $V(t)$  при логічному переході "0"→"1".

Другою частиною цієї роботи було провести математичне моделювання і отримати перехідні характеристики для логічних переходів "1"→"0". Для здійснення такого логічного переходу на кріотрон подавали керуючий імпульс магнітного потоку іншої полярності (негативний імпульс) через деякий проміжок часу після того, як кріотрон під дією позитивного імпульсу перейшов у стан логічної "1". На рис. 6 приведено перехідну характеристику кріотрона, на який спочатку діяв позитивний керуючий імпульс і перевів кріотрон у стан логічної "1", а у момент часу  $t_2 = 60$  пс подали негативний керуючий імпульс. Для моделювання використано такі параметри кріотрона та керуючих імпульсів магнітного потоку: сила критичного струму ДТП  $I_C = 10$  мА, сила транспортного струму  $I_T = 18$  мА, ємність ДТП  $C = 1,4$  пФ, нормальна провідність  $G_0 = 0,7 \text{ Ом}^{-1}$ , робоча температура  $T = 11,6$  К, момент подачі позитивного керуючого імпульсу  $t_1 = 25$  пс, середня тривалість позитивного керуючого імпульсу  $\Delta t_1 = 1$  пс, амплітуда позитивного керуючого імпульсу  $\Phi = 10\Phi_0$ , момент подачі негативного керуючого імпульсу  $t_2 = 60$  пс, середня тривалість негативного керуючого імпульсу  $\Delta t_2 = 5,6$  пс, амплітуда негативного керуючого імпульсу  $\Phi_2 = 120\Phi_0$ .

Видно, що під дією негативного імпульсу напруга на кріотроні спочатку зростала, потім зменшилась до нуля, а після цього повернулась до значення, яке відповідає стану логічної "1". Це означає, кріотрон не змінив свого логічного стану, хоча негативний керуючий імпульс мав би перевести кріотрон в стан логічного "0". Такий режим роботи кріотрона не можна вважати стабільним. Провівши низку досліджень щодо оптимізації параметрів кріотрона та параметрів

керуючих негативних імпульсів, не на жаль не вдалось змоделювати стабільний режим роботи кріотрона під час логічних переходів “1”→“0”.

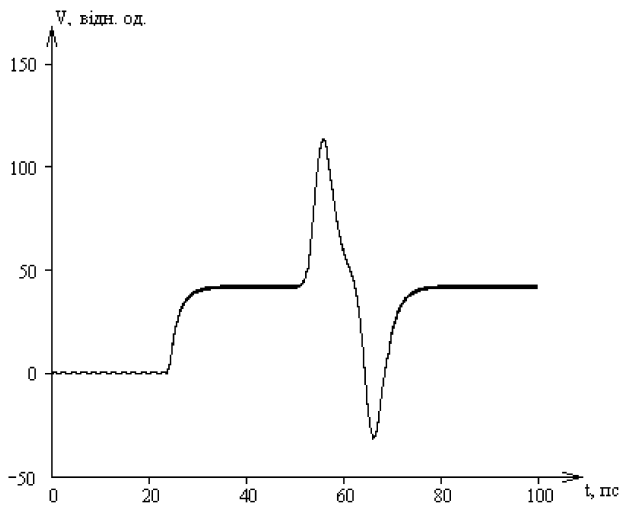


Рис. 6. Перехідна характеристика кріотрона  $V(t)$  при логічних переходах “0”→“1” і “1”→“0”.  $t_1 = 25$  пс — момент подачі першого (позитивного) імпульсу,  $t_2$  — момент подачі другого (негативного) імпульсу.

## Висновки

Використовуючи принцип роботи кріотронів на основі двоконтактного надпровідного квантового інтерферометра (СКВІДа) створено математичну модель перехідних процесів у таких структурах, які можна використовувати як квантові елементи комп'ютерної пам'яті. Розраховано перехідні характеристики квантових кріотронів при керуванні їх логічним станом за допомогою імпульсів магнітного потоку. Проведено моделювання перехідних процесів та отримано перехідні характеристики для логічних переходів “0”→“1” та “1”→“0”. Отримано, що працювати в стабільному режимі такі кріотрони можуть тільки при логічних переходах “0”→“1”. Досліджено як впливають на перехідні характеристики кріотронів амплітуда імпульсів, середня тривалість імпульсів. Встановлено, що характерні часи комутації для логічних переходів “0”→“1” при оптимальних параметрах схеми та зовнішніх імпульсів магнітного потоку склали 5 пс при середній тривалості імпульсів 0,1 пс. Результати роботи можуть бути використані для розробки та конструювання квантових елементів пам'яті на практиці.

## Література

1. Enpuku K., Shimomura Y., Kisu T. Effect of thermal noise on the characteristic of a high  $T_c$  superconducting quantum interference device // *Appl. Phys.* 1993. — V. 73. — № 11. P. 7929-7934.
2. Enpuku K., Tokita G., Maruo T. Inductance dependence of noise properties of a high- $T_c$  dc superconducting quantum interference device // *Appl. Phys.* — 1994. — V. 76. — № 12. P. 8180-8185.
3. Horvat J., Bhasale R., et al. // *Supercond. Sci. Technol.* — 1997. — Vol. 10. — P. 409-415.
4. Aloysius R. P., Sobha A., Guruswamy P., Syamaprasad U. // *Supercond. Sci. Technol.* — 2001. — Vol. 14. — P. 85-89.
5. Тиханський М.В., Шуригін Ф.М., Тиханська К.М. Моделювання перехідних процесів у джозефсонівських елементах пам'яті з використанням реальних ВАХ тунельних переходів // *Вісн. НУ “Львівська політехніка”*. — 2003. — № 482. С. 152-160.
6. Seton H.C., Hutchison J.M.S. and Bussell D.M. Liquid helium cryostat for SQUID-based MRI receivers // *Cryogenics*. — 2005. — Vol. 45. — P. 348-355.
7. Тиханський М.В., Тиханська К.М. Перехідні характеристики джозефсонівських кріотронів при керуванні їх логічним станом імпульсами струму гауссівської форми // *Вісн. НУ “Львівська політехніка”*. — 2004. — № 13. С. 191-198.
8. Rijpma A. P., Blom C. J. H. A., Balena A. P., et al. Construction and tests of a heart scanner based on superconducting sensors cooled by small stirling cryocoolers // *Cryogenics*. — 2000. — Vol. 40. — P. 821-828.
9. Тиханський М.В., Крисько Р.Р., Партика А.І. Перехідні характеристики джозефсонівських кріотронів при азотних температурах // *Вісн. НУ “Львівська політехніка”*. — 2005. — № 532. С. 138-146.
10. Zrubic V. Theoretical sensitivity limits of the SQUID system for measuring the radial position of a beam of electrically charged particles in superconductive accelerators // *Cryogenics*. — 1997. — Vol. 37. — P. 97-104.
11. Тиханський М.В., Крисько Р.Р., Партика А.І. Перехідні характеристики кріотронів на основі СКВІДів // *Вісн. НУ “Львівська політехніка”*. — 2006. — № 558. С. 64-70.
12. Kaiser G., Brehm H., Wagner R., Gerster J., Wunderlich S., Thyck M. and Seidel P. Advantages of a four-valve pulse tube cryocooler for high- $T_c$  sensor operation // *Cryogenics*. — 1997. — Vol. 37. — P. 699-703.